Динамическое моделирование макроэкономических систем: эндогенные модели Н. Калдора и М. Калецкого

О.Б. Окунев

В статье дан краткий обзор исследований в области экономической динамики; подробно представлен анализ методов и эндогенных макродинамических моделей Н. Калдора и М. Калецкого; исследована динамика дифференциально-разностных моделей при различных значениях параметра инвестиционного лага; сформулирована комбинированная модель макроэкономической динамики Калдора-Калецкого, представляющая собой систему дифференциальных уравнений с запаздыванием. В работе предлагается уточнить и расширить полученную модель путем использования прогностической оценки динамики основного капитала и сбережений макроэкономической системы.

Одним из важнейших направлений теоретических исследований в области экономической динамики является макроэкономическое моделирование динамических процессов. Такое моделирование позволяет находить глубокие взаимосвязи макроэкономических параметров и на этой основе давать объяснительный анализ основополагающих механизмов хозяйствования, что позволяет предложить подходы к решению сложных проблем, возникающих в реальных социально-экономических системах на различных стадиях их эволюции. Макроэкономические динамические модели принято разделять на модели экономического роста и модели, представляющие экономические циклы. Исследования моделей первого типа сосредотачивают внимание на поиске траекторий сбалансированного развития экономических систем, в то время как теоретические модели экономического цикла изучают закономерности немонотонного, колебательного изменения макроэкономических переменных, что, как правило, присуще реальным социально-экономическим процессам.

В данной работе мы не делаем особых различий между двумя подходами к макроэкономическому моделированию и объединяем исследуемые модели понятием экономической макродинамики. В определенной степени такая позиция обусловлена тем обстоятельством, что одна и та же математическая структура может быть отнесена к обоим типам моделей, в зависимости от особенностей используемой нелинейности и значений параметров макроэкономической системы. Это относится и к эндогенным моделям Н. Калдора и М. Калецкого, которые изучаются в данной работе.

Краткая история развития исследований в области экономической динамики. Динамические процессы в экономике и существование экономических циклов впервые были выявлены французским физиком К. Жугляром в середине XIX века[1]. Его идеи впоследствии были развиты в работах Я. ван Гельдерена[2] и Дж. Китчина[3].

В развитие теории экономических циклов общепризнанный вклад внес русский учёный Н.Д. Кондратьев[4]. В своем труде «Мировое хо-

Окунев Олег Борисович – кандидат экономических наук, доцент кафедры страхования МГИМО МИД РФ. E-mail: insurance@mgimo.ru

зяйство и его конъюнктуры во время и после войны» (1922 г.) он сформулировал предположение о существовании длинных волн в экономическом развитии капитализма.

В дальнейшем австрийским исследователем Й. Шумпетером была предложена инновационная теория циклов[5]. Она открыла в теории экономической динамики дорогу новому направлению, которое представлено такими исследователями, как С. Кузнец[6], Дж. Менш[7], А. Клайнкнехт[8], Дж. ван Дайн[9].

В 70-е годы XX века Дж. Форрестером и его учениками была разработана математическая модель системной динамики, изучение которой позволило установить, что за большие экономические циклы ответственны процессы отраслей, выпускающих средства производства[10].

В 1970–1980 гг. исследователями школы К. Фримена была разработана теория длинных волн, основанная на активной роли рабочей силы и уровня занятости[11].

Теории Форрестера и Фримена согласуются с теорией мультипликатора-акселератора, разработанной П. Самуэльсоном[12] и Дж. Хиксом[13]. Согласно последней, рост инвестиций ведет к многократному увеличению реального национального дохода. При этом национальный доход и совокупные инвестиции оказываются функциями друг от друга, порождая циклы деловой активности.

Существенный вклад в развитие теории мультипликатора-акселератора вложил Николас Калдор[14]. Известный английский экономист подверг критике слишком простые модели экзогенного мультипликатора-акселератора как проявляющие либо нереалистично стабильную, либо нереалистично нестабильную динамику. По мнению Калдора, теория эндогенного экономического цикла должна быть основана на нелинейности инвестиционной функции, хотя им признавалось, что циклы, имеющие место в реальности, не являются чисто эндогенными. В частности, он предполагал, что рост активности предпринимателей мог бы вызвать кумулятивный подъем инвестиций, который периодически сталкивался бы с экзогенными барьерами, такими, как полная занятость.

Над теорией экономических циклов также работал польский экономист Михаил Калецкий[15]. В своих работах он рассматривал различные варианты модели динамики: линейную (1935), нелинейную (1937, 1939) и линейную с влиянием экзогенного шока. Далее подходы Калдора и Калецкого будут рассмотрены более подробно.

Макроэкономическая модель экономического цикла Н. Калдора. В экзогенной модели взаимодействия мультипликатора и акселератора механизм генерации динамики конъюнктурных колебаний в экономике возникает вследствие экзогенного изменения величины автономного спроса или денежного предложения. Однако, согласно Николасу Калдору (1908-1986), динамические колебания, возникают, главным образом, по причине действия эндогенных факторов. В основу разработанной им модели экономической динамики положены нелинейные возрастающие функции инвестиций и сбережений. Калдор сделал определенные предположения о форме функций I и S, согласно которым объем инвестиций в коротком периоде нелинейно зависит от величины реального национального дохода. При этом, инвестиции малоэффективны как при низком, так и при высоком уровне занятости, и высокоэффективны в фазе подъема при переходе от малой к высокой занятости (Рис.1). Сбережения также являются нелинейно возрастающей функцией дохода в коротком периоде. При низком и высоком уровне дохода склонность к сбережению относительно высока, в то время как при среднем уровне дохода домохозяйства снижают уровень сбережений (Рис.1).

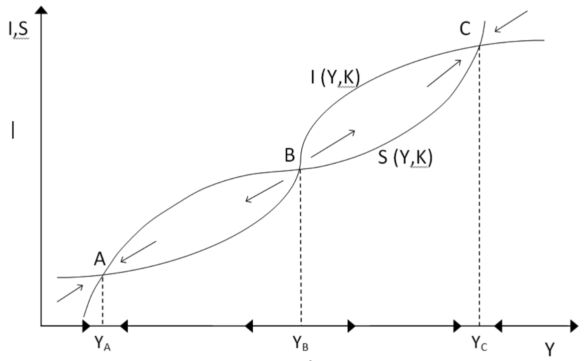


Рис.1 Нелинейные функции инвестиций и сбережений

При построении своей модели Калдор представил сбережения S и инвестиции I нелинейными функциями основного капитала K и дохода Y, соответственно, I=I(Y,K), S=S(Y,K).

Разработанная Калдором эндогенная модель экономической динамики дохода представляется двумерной автономной динамической системой нелинейных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dY}{dt} = a[I(K,Y) - S(K,Y)]$$

$$\frac{dK}{dt} = I(K,Y) \qquad \textbf{(1)}$$

Здесь a - коэффициент пропорциональности, «скорость», с которой доход реагирует на изменение соотношения между инвестициями и сбережениями. Если значение параметра пропорциональности a>0, направление изменения дохода зависит от знака разности между инвестициями и сбережениями. Второе уравнение определяет, что увеличение капитала равняется инвестициям. Для сформулированной модели Калдора в работе Чанга и Смита[16] доказаны условия существования предельного цикла.

$$\frac{dY}{dt} = a[I(K,Y) - S(K,Y)]$$

$$\frac{dK}{dt} = I(K,Y) - \delta K, \qquad (2)$$

где δ – степень обесценивания (норма амортизации) капитала.

В предположении линейности функции сбережений S относительно дохода Y, т.е. $S_Y = \gamma \in (0,1)$, и сепарабельности функции инвестиций I=I(Y,K) относительно своих двух аргументов Y и K, так что $I_Y>0$, $I_K=\beta<0$ и $I=I(Y,K)=\mu(Y)+\beta K$. При этих допущениях модель Калдора можно представить в форме:

$$\frac{dY}{dt} = \alpha\mu(Y(t)) + \alpha\beta K(t) - \alpha\gamma Y(t)$$

$$\frac{dK}{dt} = \mu(Y(t)) + (\beta - \delta)K(t) \qquad (3)$$

Выполненное с учетом работы[17] расчеты,

(в предположении, что функция $\mu(Y)$ является симметричной S-образной функцией вида $\mu(Y) = \frac{A}{1+e^{-BY}} - \frac{A}{2}$, где значения параметров модели заданы как A=4, B=1, c=0.6, α=0.8, β=-0.2, δ=0.05) показывают, что предельный цикл существует и притягивает две разные траектории, исходящие из точек **а** и **в** (рис.2):

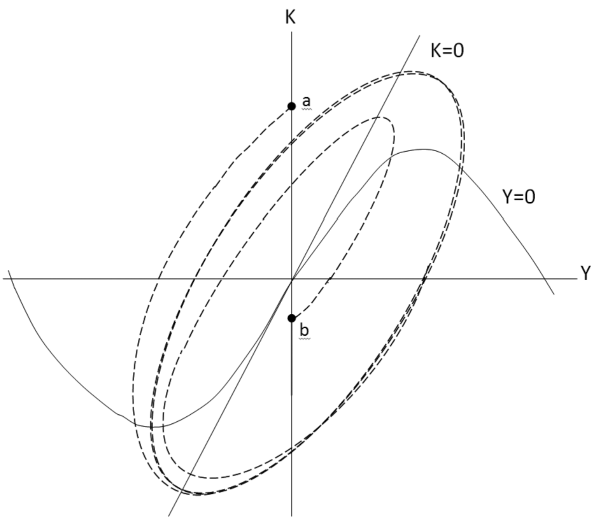


Рис.2 Устойчивая стационарная точка модели Калдора

Модели макроэкономической динамики М. Калецкого. Представленные в предыдущем разделе динамические модели Калдора не учитывает реального временного интервала (лага), существующего между моментом принятия решений об инвестировании и реальным внедрением результатов инвестирования. Модель Калецкого принимает во внимание наличие такого временного запаздывания результатов внедрения принятых инвестиционных решений. Рассмотрим формализацию этой модели[18], с учетом [16,19]. Пусть D(t)- инвестиционное решение, I(t)- фактическое внедрение инвестиций, и пусть q – фиксированная величина временного лага между инвестированием и его реализацией, т.е. I(t+q) = D(t) или I(t) = D(t - q). Этот параметр временной задержки (запаздывания) q, связанный с инвестиционными решениями, играет в теории Калецкого фундаментальную роль. В период временного лага, между моментами инвестиционного решения и внедрения инвестированного капитала, будет осуществляться производство инвестированных средств. Величиной еще не внедренных инвестиций в произвольный момент времени t будет объем инвестиционных решений, принятых в период времени между моментами t-q и t. То есть величина не внедренных инвестиций составит:

$$W(t) = \int_{t-q}^{t} D(\tau)d\tau.$$

Средняя величина не внедренных инвестиций в единицу времени указанного периода составит, таким образом, A(t)=W(t)/q. Можно показать, исходя из условий равновесия на товарном рынке, что A(t)=1/q[(K(t+q)-K(t)], т.е. средние инвестиции в единицу времени равняются среднему изменению капитала во временном лаге, или инвестиционным затратам в момент t [16,19].

На решение инвестировать положительное влияние оказывает прибыль и отрицательное капитал. Калецкий разделил доход на две части: прибыль капиталиста и заработная плата наемных рабочих. Если прибыль формируется как P(t)=sY(t), где s коэффициент пропорциональности, а Y(t) – доход, тогда модель Калецкого принимает вид: D(t) = F(sY(t), K(t)).

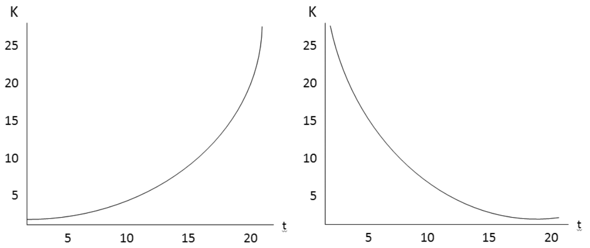
Калецким было рассмотрено несколько допущений о виде функции F. В случае линейной функции F, имеем: D(t) = asY(t) - dK(t), где a,d>0. Исходя из условия равновесия на товарном рынке Y(t) = C(t) + A(t), где потребление C(t) = cY(t) = (1-s)Y(t) и ранее полученного представления A(t) получаем: Y(t) = A(t)/s = (1/sq)[K(t+q) - K(t). Отсюда, в линейном случае, имеем D(t) = (α/q) [K(t+q) - K(t)] - δK(t). С учетом D(t) = I(t+q) = dK(t+q)/dt, получаем, после некоторых преобразований, уравнение Калецкого в форме:

$dK(t)/dt = (\alpha/q)K(t) - [\delta + \alpha/q]K(t-q)$. (4)

Исследование дифференциально-разностной модели Калецкого с запаздыванием. Итак, эволюция капитала K(t) по Калецкому определяется следующим дифференциально-разностным уравнением с запаздыванием

$dK(t)/dt = (\alpha/q)K(t) - (\delta + \alpha/q).K(t - q)$, где α - коэффициент подстройки на товарном рынке, δ - норма амортизации капитала, а q – средний интервал запаздывание инвестиционных решений. Предполагается, что q является константой. Когда величина запаздывания q мала, K(t - q) можно представить, ограничиваясь приближением ряда Тейлора первого порядка $K(t - q) = K(t) - qdK(t)/dt$, так что уравнение (1) можно записать как $dK(t)/dt = (\alpha/q)K(t) - (\delta + \alpha/q)(K(t) - qdK(t)/dt)$ или как $dK(t)/dt = (-\delta/(1 - \alpha - \delta q))K(t)$ (5).

Решение уравнения Калецкого (5) при различных значениях параметров приводит к монотонным траекториям экспоненциального роста или затухания, о чем свидетельствуют результаты, выполненного нами имитационного моделирования, представленные на Рис.3а и Рис.3в:



3а. Рост, α=0.2, δ=0.01, q=75 3в. Затухание, α=0.2, δ=0.01, q=85

Рис.4 Эволюция капитала K(t), K(0)=0.5: модель Калецкого $dK(t)/dt = (-\delta/(1 - \alpha - \delta q))K(t)$

При использовании второго порядок разложения функции

K(t - q) имеем $K(t - q) = K(t) - qdK(t)/dt + (q^2/^2)d^2K/dt^2$,

тогда уравнение (4) принимает следующий вид:

$d^2K(t)/dt^2 + [2(1 - \delta q - \alpha)/(\delta q^2 + \alpha q)]dK(t)/dt = [-2\delta/(\delta q^2 + \alpha q)]K(t)$ (6).

Решение этого уравнения имеет осциллирующее поведение. Устойчивые колебания возникают при $1 - \delta q - \alpha = 0$, с частотой $\omega^2 = 2\delta^2/(1-\alpha)$, и периодом колебаний $T = 2\pi q/\mathrm{sqrt}(1 - \alpha)$. Нами разработан программный комплекс для моделирования динамики на основе уравнения Калецкого. Так, на рис.4-авс представлены результаты проведенных на модели Калецкого численных расчетов, используя разложение второго порядка функции K(t), при следующих значениях параметров: α = 0.2, δ = 0.01, и q= 70, 80, и 90. При этом, период колебаний составил примерно T ~ 500.

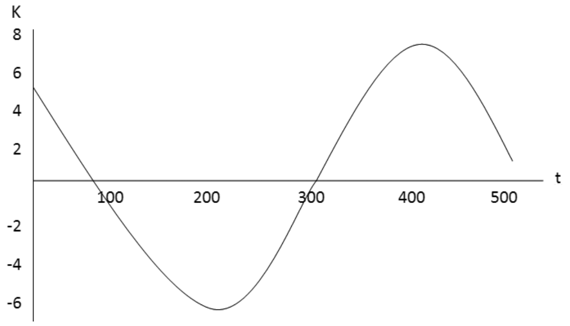


Рис.4а: Модель Калецкого с параметром запаздывания q = 90.

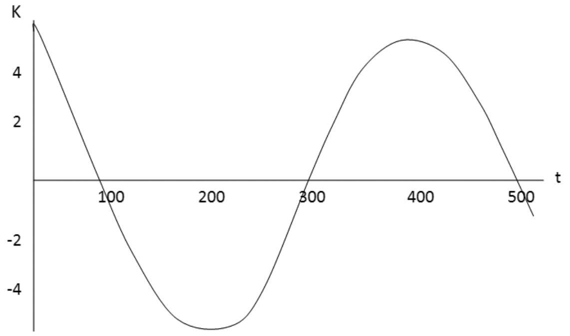


Рис.4в Модель Калецкого с параметром запаздывания q = 80.

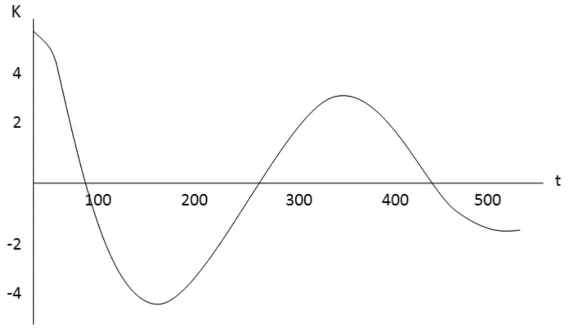


Рис.4с Модель уравнения Калецкого с параметром запаздывания q = 70.

На рис.4в (q=80) хорошо видны устойчивые колебания, а период колебаний T согласуется с аппроксимацией второго порядка в уравнении Калецкого. Рис.4а показывает результаты моделирования при q=90, при этом наблюдается возрастание амплитуды колебаний, что и следует из логики влияния параметра запаздывания. На рис.4с представлены результаты для запаздывания q=70, видно, что амплитуда убывает. Таким образом, результаты моделирования подтверждают возможность использования аппроксимации второго порядка для уравнения Калецкого (4).

Комбинированная макродинамическая система Калдора-Калецкого с инвестиционным лагом. Будем рассматривать возможность построения двумерной модели Калдора - Калецкого, в которой предложение Калецкого учитывать наличие временного лага между решением об инвестировании и реальным внедрением инвестиций, объединяется с моделью циклической динамики, разработанной Калдором. Двумя важными свойствами объединенной модели, которые обуславливают динамику и цикличность развития экономики, являются нелинейность инвестиционной функции и интервал времени между принятием инвестиционного решения и его внедрением.

Ранее мы описывали модель экономического цикла Калдора, в которой инвестиции положительно связаны с доходом нелинейной положительной связью. Модель Калецкого, представленная в предыдущем разделе, дала возможность учитывать наличие временного лага **q** между инвестиционным решением и внедрением инвестируемого капитала. Его модель использует дифференциально-разностный механизм генерации экономической динамики. Модель Калдора-Калецкого реализует комбинацию идей нелинейного инвестирования и временного лага в накоплении капитала.

Чтобы сформулировать новый подход к макроэкономической динамике, объединяющий полезные идеи Калдора и Калецкого в единую системную модель, будем предполагать справедливость одного из допущений Кейнса[19]: экономика достигает такого уровня активности, при котором сбережения равняется инвестициям. Затем мы используем идею Калецкого о временном лаге в уравнении накопления капитала. Наконец, соединим динамический мультипликатор Калдора с инвестиционным запаздыванием Калецкого, которое играет важную роль в процессе накопления капитала. Конечно, значение временного лага есть величина переменная, и изменяется в зависимости от конкретных условий инвестирования. Однако, как мы видели ранее, Калецкий предложил использовать в уравнениях усредненный временной лаг **q** между принятием решения и внедрением инвестиций. В таком случае, мы можем сформулировать систему Калдора-Калецкого из двух дифференциальных уравнений с временным запаздыванием, в следующем виде:

$$\frac{dY}{dt} = \alpha[I(Y(t), K(t) - S(Y(t), K(t))]$$

$$\frac{dK}{dt} = I(Y(t-q), K(t)) - \delta K(t), \qquad (7)$$

здесь I - инвестиции, S- функция сбережений. Y – валовой национальный до-ход, K- основной капитал, δ- степень обесценения капитала. Функция I-нели-нейна, параметр запаздывания q=const.

Инвестиции положительно связаны с доходом и отрицательно с капиталом, так что $dI/dY=I_Y>0$ и $dI/dK=I_K<0$. Кроме того, функция инвестиций принимает S-образную форму относительно Y, что указывает на то, что инвестиции становятся неэластичными при низком и высоком уровнях дохода. Аналогично, сбережения зависят от дохода, т.е. $0<dS/dY=S_Y<1$. Следуя Калдору, мы полагаем, что IY-SY>0, т.е. инвестиции растут быстрее, чем сбережения при росте национального дохода. Первое уравнение системы (7) говорит о том, что доход изменяется пропорционально превышению спроса на товарном рынке. Второе уравнение в (7) является стандартным уравнением накопления капитала, но включает временной лаг **q**. В книге А. Кравца и Шидловского[20] показано, что **q** является параметром бифуркации, и существует механизм бифуркации Хопфа, формирующий динамику предельного цикла.

Заключение. Сформулированная система Калдора-Калецкого включает функциональное дифференциально-разностное уравнение с запаздыванием. Это такой тип дифференциальных уравнений, в котором текущее поведение системы зависит от прошлой истории. Инвестиции зависят от дохода в момент принятия инвестиционные решения, и капитала в момент внедрения инвестиций. Последнее вытекает из того обстоятельства, что в момент времени t могут существовать инвестиции, которые будут внедряться в экономику во временном интервале между t-τ и t. Таким образом, комбинированная модель Калдора-Калецкого позволяет, при планировании новых инвестиций, учесть полученный в этом интервале капитал[21].

В настоящее время автор заканчивает разработку программно-методического комплекса для анализа и моделирования макродинамических процессов экономических систем на основе синтеза моделей Калдора и Калецкого, а также расширения этих моделей с использованием кибернетических механизмов прогнозирования капитала и сбережений в макроэкономической системе[22]. Разрабатываемые модели и ПМК могут быть использованы как в научно-образовательных целях, так и при анализе реальных макроэкономических задач. В последующих статьях будет представлено подробное описание возможностей новых моделей и инструментального комплекса, а также результаты моделирования некоторых задач макроэкономической динамики.

Okunev O.B. Dynamic modeling of macroeconomics: endogen models of N. Kaldor and M. Kalecki.

Summary: *The article is dedicated to the investigation of economic dynamic and evaluation of endogen macrodynamic difference-differential models, N. Kaldor and M. Kalecki. At various characteristic of investment lag, the dynamic of difference-differential models is analyzed. The Kaldor-Kaletsky cogeneration model of macroeconomic dynamics is formulated, representing system of the differential equations with delayed argument. It is offered to specify and expand the received model, by prognostic estimations of long-term assets dynamics and savings of macroeconomic system.*

Ключевые слова

Макроэкономическая динамика, экономический рост, экономический цикл, эндогенные макродинамические дифференциально-разностные модели, Н. Калдор, М. Калецкий.

Keywords

Macroeconomic dynamic, economic growth, economic cycle, endogen macrodynamic difference-differential models, Kaldor, Kalecki.

Примечания

1. Juglar, C. Des Crises commerciales et leur retour periodique en France, en An-gleterre, et aux Etats-Unis, 1862.
2. van Gelderen, J. Springtide: Reflections on industrial development and price movements, 1913.
3. Kitchin, J. Cycles and trends in economic factors. Review of Economic Statis-tics, 1923.
4. Кондратьев Н. Д. Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. – М: Экономика, 2002.
5. Шумпетер Й. Теория экономического развития: Исследование предпринимательской прибыли, капитала, кредита, процента и цикла конъюнктуры. - М.: Прогресс, 1982.
6. Kuznets, S. Schumpeter's business cycles. American Economic Review, 30, No. 2 (1940); Kuznets, S. Equilibrium economics and business cycle theory, 1930.
7. Mensch, G. Das technologische Patt: Jnnovationen ubervinden die Depression. Frankfurt-am-Main: Umschau Ferlag, 1975.
8. Kleinknecht, A. Observations on the Shcumpterian swarming of innovations. Futures, 13, No. 4 (1981).
9. Van Duijn, J. J. The long wave in economic life. London: Allen & Unwin, 1983.
10. Форрестер Дж. Мировая динамика. – М.: Наука, 1978.
11. Freeman, C., Long wave theory. Cheltenham, UK: Edward Elgar. 1996.
12. Samuelson, P.A. Interaction between the multiplier analysis and the principle of acceleration. Review of Economics and Statistics. Vol. 21 (2), 1939.
13. Hicks, J.R. Harrod's dynamic theory, Economica, Vol. 16, 1949.
14. Kaldor, N. A model of the trade cycle. Economic Journal. Vol. 50, 1940.
15. Kalecki, M. A macrodynamic theory of business cycle. Econometrica. V. 3, 1935.
16. Chang, W.W., Smith, D.J. The existence and persistence of cycles in a nonli-near model: Kaldor's 1940 model re-examined. Rev. Econ. Stud. 38, 1971.
17. Matsumoto, A., Szidarovszky, F. Delay differential nonlinear economic mod-els. In Nonlinear Dynamics in Economics, Finance and Social Sciences Essays in Honour of John Barkley Rosser Jr. N.Y.: Springer-Verlag, 2010.
18. http://homepage.newschool.edu/het//essays/
19. Тарасевич, Л.С. Макроэкономика: Л.С. Тарасевич, П.И. Гребенников, А.И. Леусский. –М.: Высшее образование, Юрайт-Издат, 2009.
20. Krawiec, A., Szydlowski, M. Investment delay and economic system dynam-ics. DCS 2009. Delayed Complex Systems, Intern. Workshop, 2009.
21. Rosen, R. Anticipatory systems. N.Y.: Pergamon Press. 1985.
22. Dubois, D. Theory of computing anticipatory systems based on differential delayed-advanced difference equations. In Computing anticipatory systems: CASYS 2001, AIP Conf. Proc., 2002.